Especial

Aplicaciones para el área de mátematicas

Problemas y ambiente de resolución de problemas

> «En los mismos ríos entramos y no entramos, [pues] somos y no somos [los mismos]»
>
> *Heráclito*

En este artículo presento aspectos generales sobre diversos enfoques de resolución de problemas y sobre los procesos requeridos en la actividad matemática; así como también orientaciones para el trabajo en el aula, con el propósito de generar ambientes de aprendizaje propicios para potenciar en niños y jóvenes construcción de conocimiento y desarrollo de procesos matemáticos en un ambiente de resolución de problemas.

Pedro Javier Rojas Garzón

Doctor en Educación, énfasis en Educación Matemática, Profesor titular de la Maestría en Educación de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Director del Grupo de Investigación MESCUD y Vicepresidente de la Asociación Colombiana de Matemática Educativa, ASOCOLME.

¿Problema o ejercicio?

Resulta pertinente reconocer algunas similitudes y diferencias entre *problema* y *situación-problema*, aunque en la práctica posiblemente no establezcamos diferencias explícitas entre estas dos expresiones. Dada una situación, ya sea en contextos cotidianos, científicos o matemáticos, los sujetos que quieran o deban abordarla pueden estar, respecto a la misma, en una disposición o en una actitud completamente diferente. El concepto de *problema*, en principio, puede asociarse con una tensión entre lo esperado y lo sucedido, o entre lo conocido y lo desconocido por una o varias personas, entre lo posible y lo no posible; en otras palabras, puede asociarse con una situación que aunque no sea familiar para un(os) sujeto(s) e implique cierta dificultad para abordarla, es posible poner en juego, de manera significativa, el conocimiento que se posee para comprenderla, abordarla e incluso resolverla. Ahora bien, una situación relacionada con un tema

Disponible en PDF

en el cual un sujeto es experto, posiblemente no constituya problema alguno para dicho sujeto, en tanto posee los conocimientos básicos para comprenderla con relativa facilidad, sin que represente un reto para él, en la medida que domina ciertos procedimientos claramente definidos para abordar o resolver tal situación, e incluso para abordar no solo esta sino una variedad de situaciones similares; en este caso, para el experto, dicha situación puede constituir un simple ejercicio, quizás de carácter completamente rutinario.

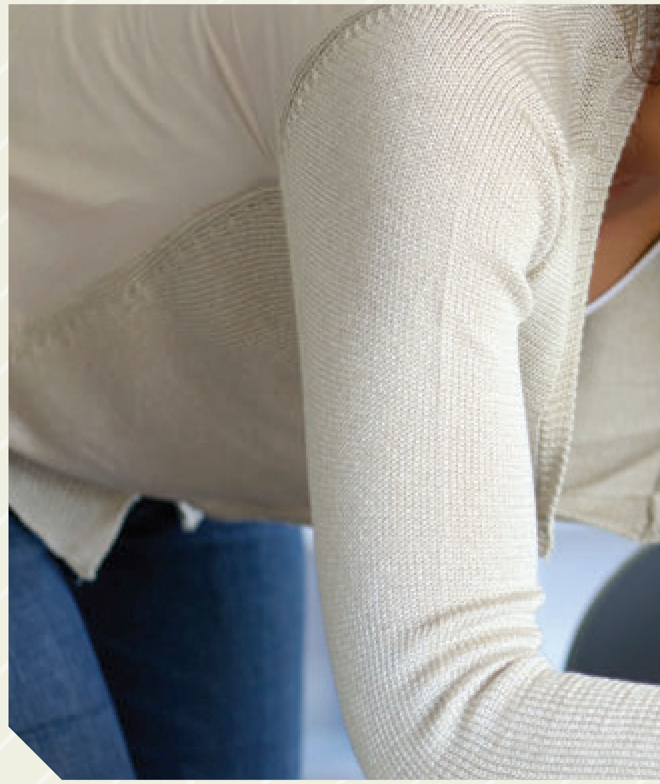
Por su parte, para un aprendiz, la misma situación puede no solo implicar un nivel significativo de dificultad, por ejemplo, en tanto pone en evidencia el desconocimiento de algunos conceptos requeridos para comprenderla y no le es posible visualizar opciones para su abordaje, así como también porque pone al descubierto un posible desconocimiento de procedimientos útiles o similares a los requeridos. Es decir, para este aprendiz podría tratarse ya no de un simple ejercicio de carácter rutinario sino de un problema complejo, posiblemente complicado, aunque esté interesado en abordarlo. No obstante, también podría suceder que, para un no-experto, esta misma situación realmente no revista interés alguno, en cuyo caso tampoco constituiría un problema para él; o también que, aunque se vea como aprendiz y pueda tener un cierto interés, reconozca un nivel de dificultad tan alto que decida no abordar la situación planteada y, por tanto, tampoco llegue a constituirse realmente en un problema para él.

Desde lo planteado anteriormente, si no hay una necesidad o un cierto interés por parte de un sujeto para abordar una situación, o si esta no constituye para él un "reto", en algún sentido, posiblemente no pueda considerarse un problema para este sujeto y, a lo más, la considere como una curiosidad, que si bien reviste una cierta dificultad, en ese momento o en ese contexto no está motivado para abordarla. Por supuesto, un contexto, sea este cotidiano, científico o puramente matemático, puede ser más motivante para unos que para otros. A manera de ejemplo, podemos describir una situación que si bien hace referencia a un juego, se puede abordar desde un contexto matemático:

El concepto de problema, en principio, puede asociarse con una tensión entre lo esperado y lo sucedido, o entre lo conocido y lo desconocido por una o varias personas, entre lo posible y lo no posible.

¿Quién dice 20?

Se inicia el juego por parejas. En cada turno el jugador debe escoger solo uno de tres números: 1, 2 o 3, y en los otros turnos, a este número se le suma el dicho por el siguiente jugador (por ejemplo, el primero dice 3 y el otro dice 1, entonces van 4, ahora el primero dice 3 y van 7, etc.). Gana quien diga primero 20. En principio, los estudiantes abordan el juego por ensayo y error; así, después de unos cuantos intentos, se puede retar a los competidores a encontrar una estrategia ganadora. Una vez encontradas las posibles estrategias, se discute la validez y generalidad de las mismas; para esto, se puede variar un poco el juego, ya sea cambiando el 20 por otro número un poco mayor, o dejando 20 pero cambiando los números posibles de decir (del 1 al 4, del 1 al 5, solo 1 y 2, etc.), o cambiando las dos condiciones iniciales.



En el ejemplo anterior, las estrategias usadas por los estudiantes varían; algunos reconocen que si llegan a 16, ganan, pero que para llegar a 16 primero deben llegar a 12; sin embargo, no siempre centran la mirada en buscar una estrategia ganadora y abandonan esta opción, solo juegan. Otros, por su parte, permanecen en la pregunta, son persistentes, y después de un tiempo y varios ensayos, posiblemente reconozcan cómo controlar las variables del problema (particularmente los números clave). Una opción: si el mínimo número es 1 y el máximo es 3, puedo *garantizar* que la suma siempre sea 4 (así, la regla que se debe seguir es: si el otro dice 1, yo digo 3; si dice 2, digo 2; si dice 3, digo 1), y al dividir 20 entre 4, el residuo es 0. Entonces, si dejo que el otro empiece, y sigo la regla anterior, *garantizo* que gano. Ahora bien, si jugamos a *quién dice 25*, para garantizar ganar, ahora debo empezar por el 1 y seguir la regla. Por supuesto, aunque yo no empiece, si el otro no ha encontrado una estrategia, aún podría ser el ganador.

Ahora bien, en este momento, considero importante resaltar que en cualquier contexto, las preguntas o conjeturas aparentemente complejas pueden tener respuestas relativamente sencillas, mientras otras preguntas o conjeturas simples de enunciar y comprender pueden ser más complejas de abordar y resolver de lo que nuestro sentido común nos podría sugerir.

A manera de ejemplo, y en un contexto puramente matemático –en el campo aritmético–, podemos mencionar una famosa conjetura, formulada desde el año 1742 por Goldbach que, si bien es muy sencilla de enunciar y de entender desde el campo aritmético, al intentar resolverla resulta mucho más compleja de lo que nuestro sentido común podría sugerirnos, tanto así que sigue siendo uno de los problemas aún sin resolver, pero que motivan a los más prestigiosos expertos en teoría de números del mundo. Incluso, su enunciado podría motivar y despertar el interés de muchos estudiantes de diferentes niveles de formación.

Veamos, que resulta relativamente fácil encontrar una regularidad al revisar algunas descomposiciones (no todas) de los algunos números pares:

$$
\begin{aligned}
4 &= 4 + 0 = 3 + 1 = 1 + 3 = 2 + 2\\
6 &= 0 + 6 = 1 + 5 = 4 + 2 = 3 + 3\\
8 &= 8 + 0 = 7 + 1 = 2 + 6 = 5 + 3\\
10 &= 1 + 9 = 8 + 2 = 7 + 3\\
12 &= 9 + 3 = 4 + 8 = 5 + 7\\
14 &= 1 + 13 = 11 + 3 = 7 + 7
\end{aligned}
$$

Si bien el número de posibles descomposiciones de los anteriores números pares, mediante dos sumandos, cada vez es mayor, nos interesa destacar que en todos los casos una de las descomposiciones involucra dos números primos. Podríamos seguir revisando más y más números pares, como lo han hecho expertos en el tema con ayuda de medios electrónicos, y evidenciar que se sigue cumpliendo para números pares cercanos a un millón de billones (por ahora, se sabe que se cumple para todos los números pares mayores que 2 y menores que 10^{18}). La conjetura es la siguiente:

Todo número entero par, mayor a 2, puede escribirse como la suma de dos números primos.

En síntesis, una situación dada, en un cierto contexto y en un determinado momento de la vida, puede no generar interés alguno para un sujeto o llevarlo a reconocer en él una gran dificultad que no está dispuesto a abordar, mientras en otro contexto o en otro momento de la vida, dicha situación, o una similar, puede no solo captar su interés, sino generar disposición para enfrentarla, comprenderla y abordarla con cierto éxito; interés que incluso podría estar dado fundamentalmente por una necesidad.

En cierto sentido, podría decirse que en principio no existen problemas, sino situaciones que, para determinados sujetos, en diferentes contextos o debido a diferentes motivaciones pueden constituirse en problemas.

Es decir, toda situación es potencialmente susceptible de constituirse en problema, para un determinado sujeto, en un cierto contexto y en un tiempo determinado; quizás, en relación con los procesos de enseñanza y aprendizaje, puede ser más apropiado hablar de *situaciones-problema.*

> En cierto sentido, podría decirse que en principio **no existen problemas,** sino situaciones que, para determinados sujetos, en diferentes contextos o debido a diferentes motivaciones **pueden constituirse en problemas.**

Relación Contenido-Situaciones problema

Iniciemos reconociendo que en contextos relacionados con los procesos de enseñanza-aprendizaje resulta de gran importancia y utilidad tener a disposición varios problemas, o situaciones-problema, que puedan ser asociados con uno o más conceptos, procesos, contenidos o procedimientos para enseñar, que a su vez cuenten con un cierto nivel de complejidad y puedan constituir un desafío para quien los pretenda abordar, de tal punto que lo motiven a enfrentarlos de manera consciente.

Todo sujeto hace parte de una cultura en la cual comparte, y le son compartidas, situaciones de interés social –problemáticas para unos pero no necesariamente para otros–. Situaciones que son culturalmente tematizadas, puestas en discusión, y en relación con las cuales, para su comprensión y abordaje, como humanidad hemos invertido mucho tiempo y esfuerzo en articular una gran variedad de conceptos, de conocimientos, de procesos y de procedimientos emergentes que han mostrado ser útiles culturalmente hablando.

Esto ha permitido y posibilitado múltiples y variados desarrollos, reconocidos como importantes para la sociedad y, en tal sentido, deseables de ser compartidos y apropiados por los miembros de la cultura, en diversos procesos de interacción, de manera diferenciada y de acuerdo con necesidades, intereses, etc.

Lo anterior no significa promover una "incorporación" acrítica, de tipo mecánica, de dichos conceptos, conocimientos, procesos y procedimientos culturalmente construidos, aunque no por ello estáticos o susceptibles de discusión y cambio; tampoco significa que, en aras de defender la no interferencia en la construcción de conocimiento de los sujetos, se espere que estos encuentren, de manera completamente independiente, situaciones que motiven y potencien en ellos conocimientos socialmente requeridos o exigidos.

Conocimientos que, vale la pena reiterar, la humanidad ha tardado años e incluso siglos en construir y depurar.

Somos sujetos inmersos en una cultura y nuestros conocimientos, necesidades y posibilidades de ser en el mundo, aunque diferenciados, son determinados, en buena parte, por ella. El ser humano, en tanto sujeto cultural, es alguien sujetado, normativizado por los contenidos de su cultura.

Como lo plantea Radford (2006), necesitamos aprender a "ser con otros", también a ser para otros. Para expresarlo de mejor manera, acudo a las palabras de Octavio Paz [en su poema Piedra del Sol]:

Para que pueda ser, he de ser otro,
salir de mí, buscarme entre los otros,
los otros que no son si yo no existo, los
otros que me dan plena existencia.

Toda construcción personal de conocimiento matemático, en cierta forma, está vinculada con problemas que tienen que ver con “realidades” culturales, así como también con maneras en las que nuestra sociedad, o más generalmente nuestra cultura, ha propuesto abordarlas para darles solución y con el conocimiento decantado en este proceso. En tal sentido, en el contexto escolar, posiblemente muchos de los problemas deben ser planteados y re-presentados de manera diferente de como surgieron, haciendo énfasis en el contexto, o los contextos, de la situación-problema o del problema, potenciando opciones de pensarlo o re-pensarlo, de abordarlo ya sea por ensayo y error, mediante procedimientos heurísticos o métodos no convencionales. Pero también se deben ofrecer espacios para reconocer elementos teóricos y prácticos, conceptuales u operacionales, obtenidos por comunidades académicas, que posibiliten abordar el problema comprensivamente y, de ser posible, resolverlo; lo cual incluye el conocimiento o reconocimiento de maneras culturalmente aceptadas como válidas.

En el proceso de resolución de problemas matemáticos, y retomando ideas de Schoenfeld (1992), se pueden reconocer cinco aspectos interrelacionados:

1. *Conocimiento de base (o recursos matemáticos) de los sujetos que intervienen.*
2. *Estrategias de resolución de problemas reconocidas y apropiadas por los sujetos.*
3. *Aspectos afectivos y el sistema de creencias de los sujetos que intervienen en el proceso*
4. *Aspectos metacognitivos.*[1]
5. *Comunidad de práctica en la cual se desarrolla este proceso.*

[1] D´Amore (1997) realiza un detallado análisis de aspectos relacionados con la resolución de problemas y, en particular, de los procesos metacognitivos.

Quiero finalizar esta sección retomando palabras del famoso matemático Félix Klein (1927), que hacen referencia a la formación matemática de futuros profesores:

Durante mucho tiempo la gente de las universidades se preocupaba exclusivamente de sus ciencias sin conceder atención alguna a las necesidades de las escuelas, sin cuidarse en absoluto de establecer conexión alguna con la matemática de la escuela. ¿Cuál era el resultado de esta práctica? El joven estudiante de la universidad se encontraba a sí mismo, al principio, enfrentado con problemas que no le recordaban las cosas que le habían ocupado en la escuela. Naturalmente olvidaba estas cosas rápidamente. Cuando después de acabar su carrera se convertía en profesor, se encontraba de repente en una situación que se suponía debía enseñar matemáticas elementales tradicionales en el viejo modo pedante; y puesto que, sin ayuda, apenas era capaz de percibir conexión entre su tarea y sus matemáticas universitarias, pronto recurría a la forma de enseñanza garantizada por el tiempo, y sus estudios universitarios quedaban solamente como una memoria más o menos placentera que no tenía influencia sobre la enseñanza.

Somos sujetos inmersos en una cultura y nuestros conocimientos, necesidades y posibilidades de ser en el mundo, aunque diferenciados, son determinados, en buena parte, por ella.

Enfoques de resolución de problemas y procesos matemáticos

Los enfoques sobre *resolución de problemas* que posibilitan el desarrollo de un pensamiento matemático pueden agruparse al menos en tres, los cuales pueden ser diferenciados por el papel que juega el problema (ver, por ejemplo, Charnay, 1994):

1. *Como aplicación de conocimiento previamente adquirido.* Asociado con una forma de trabajo en la que el problema es visto como aplicación de un conocimiento previamente adquirido; privilegiando una secuencia de trabajo en el aula que puede resumirse así: Definiciones de conceptos, reglas o propiedades, ejemplos, ejercicios y problemas de aplicación de los conceptos definidos y de las propiedades dadas.

2. *Como conjunto de estrategias y métodos para resolver problemas.* Asociado con una forma de trabajo en la que se privilegia el reconocimiento de estrategias para abordar problemas tipo, como los que usualmente se denominan problemas tipo olimpiadas.

3. *Como fuente y ocasión de aprendizaje.* Asociado con una forma de trabajar en la que se parte de uno o varios problemas, a partir de los cuales se reconozca la necesidad e importancia de ciertos conceptos y procedimientos; así, el problema se constituye en fuente de desarrollo del pensamiento matemático y, en la interacción con otros, el estudiante adquiere y construye su saber.

Se pueden proponer otras clasificaciones, realizando subdivisiones relacionadas con el uso específico que se da a los problemas, como medios para el logro de otros objetivos curriculares y no como propósito en sí mismo. Así, el papel que desempeña el problema puede ser:

- *Justificativo.* Para mostrar, por ejemplo, la importancia de las matemáticas en la vida cotidiana, a la vez que se motiva su enseñanza.

- *Motivacional.* Para despertar interés e introducir, por ejemplo, algunos contenidos, procedimientos o generar reflexiones sobre hechos o preguntas relacionadas con una temática particular.

- *Recreativo.* Para mostrar posibilidades lúdicas de los conocimientos y procesos matemáticos, además de posibilitar cierta motivación por hechos específicos.

- *Práctico.* En tanto opción de aplicación de conocimientos y técnicas.

- *Contextual.* En tanto provee contextos para abordar aspectos relacionados con diversas temáticas (en la que se incluyen aspectos tanto conceptuales como procedimentales).

- *Potencial.* En tanto posible medio para el desarrollo de nuevas habilidades y la construcción de nuevo conocimiento.

En relación con la formación matemática, resulta deseable participar de propuestas teórico-prácticas para el desarrollo del currículo que asumen como estrategia conceptual o metodológica un cierto enfoque de resolución de problemas que, además de guardar cierta correspondencia histórica con la dinámica de desarrollo de las matemáticas, pueda también potenciar y generar conocimiento contextualizado de las matemáticas, y así posibilitar su uso comprensivo.

No se trata pues de plantear que se trabaje desde la resolución de problemas simplemente como un eslogan. Cualquiera que sea el enfoque asumido para la resolución de problemas, es de esperarse que posibilite y potencie procesos que consideramos relevantes en la actividad matemática, como los siguientes:

- Representación – Significación / Comprensión / Interpretación
- Generalización – Particularización
- Ejemplificación / Identificación / Distinción / Aplicación / Contextualización/ Reconocimiento / Detección / …
- Algoritmización / Mecanización (Repetición) – Problematización (asociada a los objetos matemáticos identificados en las actividades realizadas).
- Análisis / Descomposición – Síntesis / Reificación / Unificación / Encapsulación
- Comunicación – Definición – Enunciación (expresar propiedades, conjeturas, dar definiciones,…) / Argumentación / Justificación / Demostración / Explicación
- Personalización / Construcción / Representación interna – Institucionalización
- Idealización / Esquematización / Abstracción – Materialización / Representación externa (gráfica, tabular, expresiones en lenguaje natural, expresión simbólica, entre otras).

Así, siguiendo ideas de Schoenfeld (1992), el trabajo que se realice en las aulas de matemáticas debe posibilitar a los estudiantes explicar una variedad de situaciones-problema, que pueden ir desde ejercicios, pasando por el uso de estrategias requeridas para abordar problemas clásicos, y por situaciones de exploración y formulación de conjeturas, hasta problemas abiertos que potencien el desarrollo de habilidades para analizar, comprender, percibir relaciones y estructuras, así como proponer nuevas estrategias y expresar argumentos con claridad y coherencia. Esto es, potenciar en los estudiantes el desarrollo de aprendizajes autónomos, que les posibilite interpretar y usar la matemática.

No se trata pues de plantear que se trabaje desde la resolución de problemas **simplemente como un eslogan.**

Trabajo individual -Trabajo grupal

Todo proceso de interacción potencia aprendizajes en unos y otros, pero resulta deseable que, al menos en contextos escolares y en algunas situaciones específicas, quienes interactúan en relación con alguna tarea propuesta hayan reflexionado sobre la misma, cuenten con algunos elementos específicos con respecto a la situación-problema y puedan aportar en los procesos de interacción, por ejemplo, con preguntas, con sugerencias desde sus comprensiones parciales y con estrategias u opciones para abordarlas, aunque estas en principio sean poco claras.

Por tanto, si bien debemos reconocer la importancia de los procesos de interacción, en pequeños y grandes grupos, de aprender a

…resulta pertinente insistir en que **aprender a pensar matemáticamente** requiere del uso flexible y efectivo de conocimientos, además del dominio de los recursos dentro de la disciplina, …así como también, cierta **motivación** y **disposición** para involucrarse en actividades propias del quehacer matemático, que deben ser abordadas en las aulas.

"ser con otros", también debemos tener en cuenta la importancia de los procesos de reflexión y producción individual, en tanto que, en un momento dado, en relación con ciertos propósitos o necesidades, un proceso de interacción no siempre es el más productivo.

En tal sentido, y sin querer poner en discusión la necesidad de promover en el aula la socialización y la argumentación de producciones en relación con una situación-problema, es necesario ofrecer a los estudiantes espacios y tiempos adecuados para realizar tales producciones, poniendo en juego su conocimiento (considerado correcto o no) y su experiencia (asumida como adecuada o no), al intentar reconocer y explicitar criterios y reglas para abordar dichas situaciones, permitiendo no solo despertar su interés por ellas sino también realizar esfuerzos para resolverlas, o al menos intentar hacerlo, reconociendo explícitamente los conocimientos y procedimientos puestos en juego, la validez de los mismos, los argumentos requeridos y los procesos realizados, los logros y las limitaciones encontradas, etc.

A manera de conclusión

Finalmente, y retomando ideas de Schoenfeld (1992), resulta pertinente insistir en que *aprender a pensar matemáticamente* requiere del uso flexible y efectivo de conocimientos, además del dominio de los recursos dentro de la disciplina, particularmente de las reglas que requieren ser puestas en juego; así como también, cierta motivación y disposición para involucrarse en actividades propias del quehacer matemático, que deben ser abordadas en las aulas. En tal sentido, sería pertinente que como profesores promoviéramos ambientes de aprendizaje propicios para potenciar la resolución de problemas, en los que propongamos situaciones-problema que despierten el interés de los estudiantes, y posibilitemos espacios de trabajo tanto individuales como en pequeños grupos, para que interactúen y socialicen sus propuestas, y para que reconozcan unos y otros los conocimientos, las estrategias y los argumentos "puestos en juego" por cada quien para abordar estas situaciones, así como la eficacia de los mismos. Posteriormente, una vez hayamos reconocido los conocimientos, las estrategias y los argumentos acogidos por los diferentes grupos, podemos contrastarlos, analizando en cada caso posibilidades o limitaciones, para reconocer o no reconocer la validez de dichos argumentos e institucionalizar los resultados colectivamente construidos o reconstruidos. RM

BIBLIOGRAFÍA

- Charnay, R. (1994). *Aprender (por medio de) la resolución de problemas. En C. Parra e I. Saiz (comps.).* Didáctica de las matemáticas. Aportes y reflexiones. Buenos Aires: Paidós.
- D´Amore, B. (1997). *Problemas: Pedagogía y psicología de la matemática en la actividad de resolución de problemas.* Madrid: Síntesis.
- Klein, F. (1927). *Matemática elemental desde un punto de vista superior.* Madrid: Biblioteca Matemática [Citado por Grupo Matemáticas Escolares U. D. (2002). Matemáticas para todos. Bogotá: Universidad Distrital Francisco José de Caldas].
- Lave, J. & Wenger, E. *(1991). Situated learning. legitimate peripheral participation.* Cambridge: Cambridge University Press.
- Radford, L. (2006). *Elementos de una teoría cultural de la objetivación.* Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, número especial, 267-299.
- Schoenfeld, A. (1992). *Learning to think mathematically: problem solving, metacognition and sense making in mathematics.* In Handbook for Research on Matematics Teaching and Learning. New York: Macmillan.